

Bilangan Kromatik Lokasi Graf $P(m,1)$ Dengan Satu Lintasan Pada Sisi Luar

Agus Irawan¹, Sri Ipnuwati², Ifan Fadilah³

^{1,2}Sistem Informasi, Fakultas Teknologi dan Ilmu Komputer, Institut Bakti Nusantara

³SMKS Nurul Huda Pringsewu

E-mail: agusirawan814@gmail.com¹, nengachie@gmail.com², ifanfadilahrf@gmail.com³

Article History:

Received: 04 Juli 2024

Revised: 22 Juli 2024

Accepted: 24 Juli 2024

Keywords: *bilangan kromatik lokasi, graf, satu lintasan*

Abstract: *Penelitian ini membahas bilangan kromatik lokasi graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar. Metode yang digunakan dimulai dengan mendefinisikan dan notasi graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar dinotasikan dengan $P_{(m,1)}^1$, menentukan batas bawah dari $P_{(m,1)}^1$, dan menentukan batas atas dari $P_{(m,1)}^1$. Hasil penelitian menunjukkan bilangan kromatik lokasi yang valid untuk graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar yaitu 4 untuk n ganjil dan 5 untuk n genap. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi pada pengembangan teori graf dan aplikasinya.*

PENDAHULUAN

Pada tahun 2002 (Chartrand et al., 2002) memperkenalkan bilangan kromatik lokasi graf. Konsep ini menggabungkan pewarnaan titik pada graf dengan konsep dimensi partisi graf. Pewarnaan titik pada graf adalah proses pemberian warna ke semua titik-titik pada graf dengan aturan bahwa setiap titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk pewarnaan titik pada graf disebut bilangan kromatik lokasi, yang dinotasikan dengan $\chi_L(H)$. Selanjutnya pada graf lintasan, graf siklus, graf bintang ganda juga telah ditentukan bilangan kromatik lokasinya. Pada pohon berorde $m \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik lokasi r jika dan hanya jika $r \in (3, 4, \dots, m - 2, m)$; karakterisasi graf berorde m dengan bilangan kromatik lokasinya m , yaitu graf multipartit. Lebih dari itu juga telah dikarakterisasi graf dengan bilangan kromatik lokasinya $m - 1$ dan beberapa graf dengan bilangan kromatik lokasinya terbatas di atas oleh $m - 2$. (Chartrand et al., 2003).

Selanjutnya telah ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf grid, perkalian kartesian untuk lintasan dan graf lengkap, serta perkalian kartesian dari dua buah graf lengkap (Behtoei & Omoomi, 2016). Beberapa peneliti telah melakukan kajian mengenai bilangan kromatik lokasi dan beberapa hasil operasinya, diantaranya bilangan kromatik lokasi pada graf origami (Irawan, et al., 2021) bilangan kromatik lokasi operasi barbel graf origami (Irawan et al., 2021), bilangan kromatik lokasi subdivisi dari operasi barbel tertentu graf origami (Irawan, et al., 2021), bilangan kromatik lokasi graf origami dengan satu lintasan pada sisi luar (Irawan et al., 2022) dan bilangan kromatik lokasi operasi tertentu graf origami (Asmiati et al., 2023).

Penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf masih menjadi topik yang menarik hingga saat ini. Banyak kajian telah dilakukan dalam bidang ini, termasuk penentuan bilangan kromatik lokasi untuk berbagai kelas graf tertentu, karakterisasi graf berdasarkan bilangan kromatik lokasi

yang spesifik, serta penentuan bilangan kromatik lokasi untuk hasil operasi dari graf tertentu. Pada graf Petersen diperumum juga telah ditentukan bilangan kromatik lokasinya (Asmiati et al., 2017), hasil operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{(m,1)}$ (Irawan et al., 2020), operasi baru graf Petersen diperumum $N_{P(m,1)}$ (Irawan & Istiani, 2024). Tujuan dari penelitian ini adalah melakukan perluasan dari bilangan kromatik lokasi graf Petersen diperumum dengan menentukan bilangan kromatik lokasi graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar, sehingga dapat mempertahankan bilangan kromatik lokasinya.

LANDASAN TEORI

Berikut ini diberikan definisi yang diperlukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

Definisi 2.1. (Chartrand et al., 2002) Misalkan e suatu pewarnaan titik pada graf H dengan $e(u) \neq e(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di H . Misalkan E_j himpunan titik – titik yang diberi warna j , yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari $V(H)$. Kode warna $e_\Pi(v)$ dari v adalah r -pasang terurut $(d(v, E_1), d(v, E_2), \dots, d(v, E_r))$ dengan $d(v, E_1) = \min \{d(v, x) | x \in E_j\}$ untuk $1 \leq j \leq k$. Jika setiap H mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi H . Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari H , dan dinotasikan dengan $\chi_L(H)$.

Definisi 2.2. (Watkins, 1969) Misalkan $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ banyaknya titik luar dan $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ adalah titik dalam untuk $m \geq 3$. Graf Petersen diperumum $P_{(m,k)}$, $m \geq 3$ dan $1 \leq k \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor$, $1 \leq j \leq m$ merupakan graf yang memiliki $2n$ titik $\{u_j\} \cup \{v_j\}$, dan sisi $\{u_j v_{j+1}\} \cup \{v_j v_{j+k}\} \cup \{u_j v_j\}$.

Berikut ini Teorema dasar untuk menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga di v .

Teorema 2.1. (Chartrand et al., 2002) Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik – titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Teorema 2.2. (Asmiati et al., 2017) Bilangan kromatik lokasi graf Petersen diperumum $P(m, 1)$, untuk $m \geq 3$ adalah 4 untuk m ganjil dan 5 untuk m genap.

METODE PENELITIAN

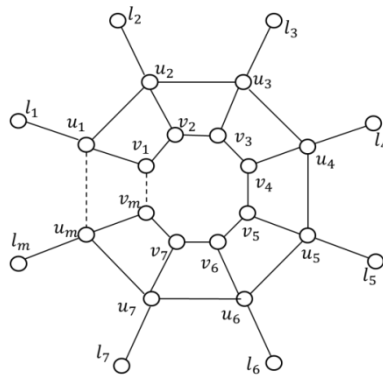
Secara umum, metode yang digunakan untuk menentukan bilangan kromatik dari graf Petersen yang diperluas dengan satu lintasan pada sisi luar adalah sebagai berikut:

Langkah 1

Mendefinisikan graf $P_{(m,1)}^1$, sebagai berikut :

Definisi 3.1. Misalkan graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar dinotasikan dengan $P_{(m,1)}^1$, untuk $m \geq 3$ adalah graf dengan $V(P_{(m,1)}^1) = \{v_j, v_j, l_j : j \in [1, m]\}$ and $E(P_{(m,1)}^1) = \{u_j u_{j+1}, v_j v_{j+1}, j \in [1, m-1]\} \cup \{u_m u_1, v_m v_1\} \cup \{u_j v_j, u_j l_j : j \in [1, m]\}$.

Berikut ini diberikan ilustrasi dari graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar.



Gambar 1. Graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar

Langkah 2

Mengidentifikasi kelas-kelas warna dari $P_{(m,1)}^1$ melalui pendekatan bilangan kromatik lokasi graf.

Langkah 3

Menentukan batas bawah dari $P_{(m,1)}^1$

Langkah 4

Menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi pada $P_{(m,1)}^1$.

Langkah 5

Merumuskan hasil yang diperoleh dalam bentuk teorema dan membuktikannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi graf $P_{(m,1)}^1$. Misalkan graf Petersen diperumum dengan satu lintasan pada sisi luar dinotasikan dengan $P_{(m,1)}^1$, untuk $m \geq 3$ adalah graf dengan $V(P_{(m,1)}^1) = \{v_j, v_j, l_j : j \in [1, m]\}$ dan $E(P_{(m,1)}^1) = \{u_j u_{j+1}, v_j v_{j+1}, j \in [1, m-1]\} \cup \{u_m u_1, v_m v_1\} \cup \{u_j v_j, u_j l_j : j \in [1, m]\}$.

Teorema 4.1. $\chi_L(P_{(m,1)}^1) = 4$, untuk m ganjil, $m \geq 3$

Bukti. Pertama akan ditentukan batas bawah dari $P_{(m,1)}^1$ untuk m ganjil, $m \geq 3$, karena graf $P_{(m,1)}^1$ memuat graf $P(m, 1)$ maka berdasarkan Teorema 2.2 $\chi_L(P_{(m,1)}^1) \geq 4$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari ditunjukkan bahwa $P_{(m,1)}^1$ untuk m ganjil, $m \geq 3$, untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(P_{(m,1)}^1) \leq 4$, pandang pewarnaan lokasi berikut :

$$e(u_j) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 \\ 2, & \text{untuk } j \text{ ganjil, } j \geq 3 \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap, } j \geq 2 \end{cases}$$

$$e(v_j) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j \text{ ganjil, } j \leq m-2 \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap, } j \geq m-1 \\ 3, & \text{untuk } j = m \end{cases}$$

$$e(l_j) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Kode warnanya dari semua titik pada $V(P_{(m,1)}^1)$ untuk m ganjil, $m \geq 3$:

$$e_{\Pi}(u_j) = \begin{cases} j-1, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right] \\ m-j+1, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[\frac{m+3}{2}, m\right] \\ & \text{komponen ke } -4, j \in \left[\frac{m+1}{2}, m\right] \\ j+1, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right] \\ 0, & \text{komponen ke } -3, j \text{ genap } j \geq 2 \\ & \text{komponen ke } -2, j \text{ ganjil } j \geq 3 \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$e_{\Pi}(v_j) = \begin{cases} j, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right] \\ m-j+2, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[\frac{m+3}{2}, m\right] \\ j, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right] \\ m-j, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[\frac{m+1}{2}, m\right] \\ 0, & \text{komponen ke } -3, j \text{ ganjil } j \geq 1 \\ & \text{komponen ke } -2, j \text{ genap } j \geq 2 \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$e_{\Pi}(l_j) = \begin{cases} j, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[1, \frac{m+1}{2}\right] \\ m-j+2, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[\frac{m+3}{2}, m\right] \\ j+2, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right] \\ m-j+2, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[\frac{m+1}{2}, m\right] \\ 0, & \text{komponen ke } -3, j \text{ ganjil, } j \geq 1 \\ & \text{komponen ke } -2, j \text{ genap, } j \geq 2 \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Karena kode warna dari semua titik berbeda, maka e adalah pewarnaan lokasi pada $P_{(m,1)}^1$ untuk m ganjil, $m \geq 3$. Jadi $\chi_L(P_{(m,1)}^1) \leq 4$, untuk m ganjil, $m \geq 3$. ■

Teorema 4.2. $\chi_L(P_{(m,1)}^1) = 5$, untuk m genap, $m \geq 4$

Bukti. Pertama akan ditentukan batas bawah dari $P_{(m,1)}^1$ untuk m genap, $m \geq 4$, karena graf $P_{(m,1)}^1$ memuat graf $P(m, 1)$ maka berdasarkan Teorema 2.2 $\chi_L(P_{(m,1)}^1) \geq 5$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari ditunjukkan bahwa $P_{(m,1)}^1$ untuk m genap, $m \geq 4$, untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(P_{(m,1)}^1) \leq 5$, pandang pewarnaan lokasi berikut :

$$e(u_j) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 \\ 2, & \text{untuk } j \text{ ganjil, } j \leq m-1 \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap, } j \leq m-2 \\ 5, & j = m \end{cases}$$

$$e(v_j) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j \text{ ganjil, } j \leq m-1 \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap, } j \geq m-2 \\ 4, & \text{untuk } j = m \end{cases}$$

$$e(l_j) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Kode warnanya dari semua titik pada $V(P_{(m,1)}^1)$ untuk m genap, $m \geq 4$:

$$e_{\Pi}(u_j) = \begin{cases} j-1, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j+1, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ & \text{komponen ke } -4, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ j+1, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[1, \frac{m-1}{2}\right] \\ 0, & \text{komponen ke } -3, j \text{ genap } j \geq 2 \\ & \text{komponen ke } -2, j \text{ ganjil } j \geq 3 \\ j, & \text{komponen ke } -5, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j, & \text{komponen ke } -5, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ 2, & \text{komponen ke } -2, j = 1 \\ & \text{komponen ke } -3, j = n \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$e_{\Pi}(v_j) = \begin{cases} j, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j+2, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ j, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ 0, & \text{komponen ke } -3, j \text{ ganjil } j \geq 1 \\ & \text{komponen ke } -2, j \text{ genap } j \geq 2 \\ j+1, & \text{komponen ke } -5, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j+1, & \text{komponen ke } -5, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ 2, & \text{komponen ke } -2, j = n \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$e_{\Pi}(l_j) = \begin{cases} j, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j+2, & \text{komponen ke } -1, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ j+2, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[1, \frac{m}{2}\right] \\ m-j+2, & \text{komponen ke } -4, j \in \left[\frac{m}{2}+1, m\right] \\ 0, & \text{komponen ke } -3, j \text{ ganjil, } j \geq 1 \\ & \text{komponen ke } -2, j \text{ genap, } j \geq 2 \\ 3, & \text{komponen ke } -2, j = 1 \\ 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Karena kode warna dari semua titik berbeda, maka e adalah pewarnaan lokasi pada $P_{(m,1)}^1$ untuk m ganjil, $m \geq 4$. Jadi $\chi_L(P_{(m,1)}^1) \leq 5$, untuk m genap, $m \geq 4$. ■

KESIMPULAN

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a) $\chi_L(P_{(m,1)}^1) = 4$, untuk m ganjil, $m \geq 3$
 b) $\chi_L(P_{(m,1)}^1) = 5$, untuk m genap, $m \geq 4$

Penelitian ini merupakan pengembangan yang dari penelitian sebelumnya (Asmiati et al., 2017); (Irawan et al., 2020); (Irawan & Istiani, 2024) sehingga terlihat perluasan yang dapat dilakukan dari graf Petersen diperumum, sehingga mempertahankan bilangan kromatik lokasinya.

DAFTAR REFERENSI

- Asmiati, Irawan, A., Nuryaman, A., & Muludi, K. (2023). The locating chromatic number for certain operation of origami graphs. *Mathematics and Statistics*, 11(1), 101–106. <https://doi.org/10.13189/ms.2023.110111>
- Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, & Yulianti, L. (2017). On some petersen graphs having locating chromatic number four or five. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 102(4), 769–778. <https://doi.org/10.17654/MS102040769>
- Behtoei, A., & Omoomi, B. (2016). On the locating chromatic number of the cartesian product of graphs. *Ars Combinatoria*, 126, 221–235.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The locating-chromatic number of a graph. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and It's Applications*, 36, 89–101.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2003). Graphs of order n with locating-chromatic number $n - 1$. *Discrete Mathematics*, 269(1–3), 65–79. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(02\)00829-4](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00829-4)
- Irawan, A., Asmiati, Suharsono, S., & Muludi, K. (2021). The locating-chromatic number of certain barbell origami graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1751(1), 1–12. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1751/1/012017>
- Irawan, A., Asmiati, A., Zakaria, L., & Muludi, K. (2021). The locating-chromatic number of origami graphs. *Algorithms*, 14(6), 1–15. <https://doi.org/10.3390/a14060167>
- Irawan, A., Asmiati, Suharsono, S., Muludi, K., & Zakaria, L. (2020). Certain operation of generalized petersen graphs having locating-chromatic number five. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 24(2), 83–97. <https://doi.org/10.17654/dm024020083>
- Irawan, A., Herindri, B., Utami, S., & Maselena, A. (2022). *An Origami Graph with One Path on the Outer Vertex Has Locating-Chromatic Number Four*. 20(12), 3504–3509. <https://doi.org/10.14704/NQ.2022.20.12.NQ77358>
- Irawan, A., & Istiani, A. (2024). The Locating Chromatic Number for the New Operation on Generalized Petersen Graphs $N_P(m,1)$. *Sainmatika: Jurnal Ilmiah Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 21(1), 89–96. <https://doi.org/10.31851/sainmatika.v21i1.14864>
- Irawan, A., Zakaria, L., Muludi, K., Herindri, B., & Utami, S. (2021). *Subdivision of Certain Barbell Operation of Origami Graphs has Locating-Chromatic Number Five*. 21(9).
- Watkins, M. E. (1969). A theorem on tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 6(2), 152–164. [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(69\)80116-X](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(69)80116-X)